

Politecnico di Milano – Facoltà di Ingegneria industriale
Corso di laurea in Ingegneria meccanica
Anno accademico 2008-09

Insegnamento di Costruzione di Macchine I
(Prof. M. Giglio, M. Gobbi, S. Miccoli, M. Sangirardi)

Esercizio n° 6

Esercitazione n° 3 – Analisi cinematica

Effettuare l'analisi cinematica della struttura in Figura 1 e successivamente determinare le reazioni vincolari.

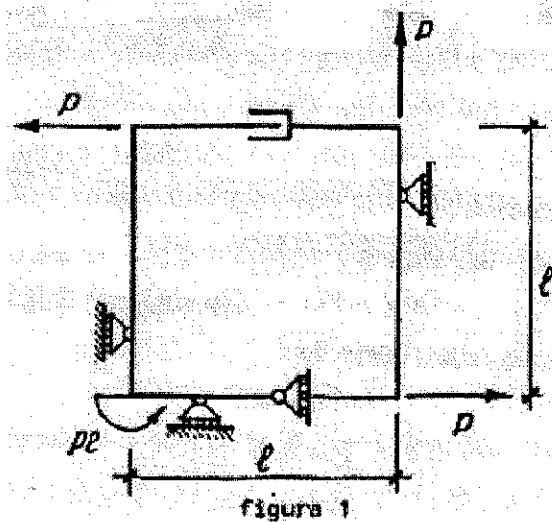


Figura 1

Analogo procedimento si poteva seguire considerando l'asta 3 invece della 1; si lascia al lettore lo svolgimento di questo approccio.

Esempio 2 (figura 10)

Ovvio il bilancio dei gradi di libertà e dei gradi di vincolo: $l = v = 6$. Per completare l'indagine sulla cinematica della travatura si può seguire un procedimento analogo al precedente fissando l'attenzione su un'asta, ad esempio la 2 (figura 10). L'asta 2 è vincolata a terra direttamente dal carrello C ed indirettamente, tramite l'asta 1, dai carrelli A e B (figura 11).

Il centro di istantanea rotazione O_2 dell'asta 2, a causa del vincolo costituito dal carrello C, deve essere un punto della retta a. Supponiamo ora di trascurare il carrello C e di determinare quale centro di istantanea rotazione avrebbe la 2 per i restanti vincoli. Si

può osservare anzitutto che un eventuale centro di istantanea rotazione (relativo) ω_{12} dell'asta 2 rispetto alla 1 dipende dai collegamenti esistenti fra

le aste 1 e 2 e cioè dal carrello B e del maniccotto E (figura 12). Il maniccotto impone al centro relativo ω_{12} di essere il punto all'infinito in direzione verticale mentre il carrello impone allo stesso centro di appartenere alla retta d. Le due condi-

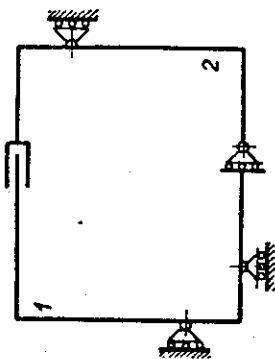


figura 10

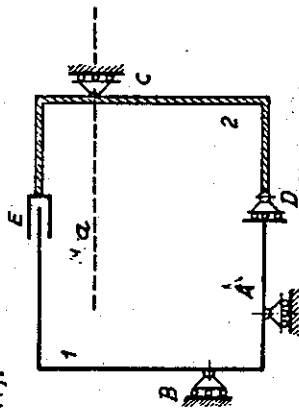


figura 11

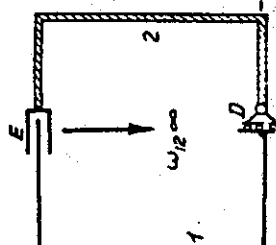


figura 12

zioni sono ovviamente incompatibili e pertanto tale centro non esiste, cioè le aste 1 e 2 non possono compiere movimenti relativi.

Si tratta ora di esaminare le condizioni imposte dai carrelli A e B al moto rigido del complesso delle aste 1 e 2. Tali carrelli impongono all'insieme delle aste di ruotare intorno ad F , punto di incontro delle normali b e c; basta dunque che tale punto non appartenga alla retta a perché la struttura sia isostatica (figura 13).

figura 13

L'analisi ora svolta suggerisce un'altra possibile via per affrontare questo problema. Si può constatare che la struttura presenta tre soli gradi di vincolo al sistema di riferimento; poiché tre è il numero di gradi di vincolo minimo necessario per vincolare un corpo rigido nel piano occorre che i vincoli interni siano in grado di impedire i moti rigidi dell'asta 1 rispetto all'asta 2. Lo studio della travatura si scinde quindi in due momenti indipendenti: 1) verificare che all'insieme delle aste non sono consentiti spostamenti rigidi relativi, 2) controllare che i vincoli a terra siano in grado di garantire la immobilità di tale insieme. Per quanto riguarda il secondo momento si tratta di controllare che i carrelli A, B e C siano ben disposti e ciò non necessita di particolari commenti. Il primo momento invece richiede che si esaminino i vincoli interni, in questo caso il carrello D ed il maniccotto E, al fine di verificarne la attitudine ad impedire moti relativi tra le aste 1 e 2.

Situazioni come queste possono presentarsi per un'ampia classe di strutture e la parte interna, per la quale si deve verificare l'impossibilità di moti rigidi relativi, può essere comunque complessa: l'esempio ora presentato è uno dei casi più semplici perché la parte interna è costituita da due travi appoggiate l'una all'altra con cerniera (impro-

pria: il manicotto E) e carrello.

Un caso tipico si ha quando la struttura è costituita da un unico anello chiuso (figura 14) formato da tre aste collegate tra loro

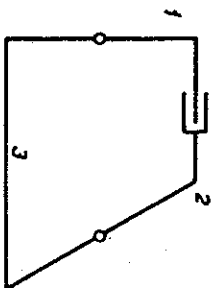


figura 14

da tre vincoli doppi (cerniere, pattini e manicotti). Si constata facilmente che i vincoli sono in numero strettamente necessario ad impedire i moti rigidi relativi delle tre aste. Infatti le aste 1 e 2 costituiscono un arco a tre cerniere montato sull'asta 3; il sistema non è labile se i perni delle tre cerniere non sono allineati.

Con questo criterio, collegando tra loro un certo numero di anelli in sostituti si possono ottenere strutture statiche più complesse (figura 15).

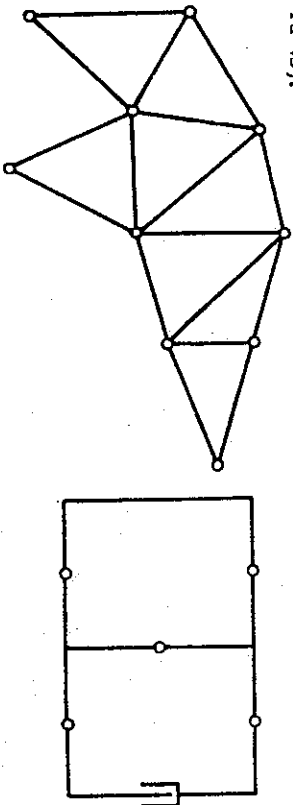


figura 15

In generale qualsiasi criterio di collegamento tra due aste che elimini col numero strettamente necessario di vincoli ogni possibile moto relativo porta a situazioni del tipo di quelle ora analizzate.

Ad esempio, in figura 16, le aste 1 e 2 sono collegate da tre vincoli semplici: il carrello A che impone al centro di istantanea rotazione ω_2 di giacere sulla retta a; l'asta 3 che impone ad ω_2 di appartenere alla retta b ed infine l'asta 4 che impone al medesimo punto di stare sulla retta c.

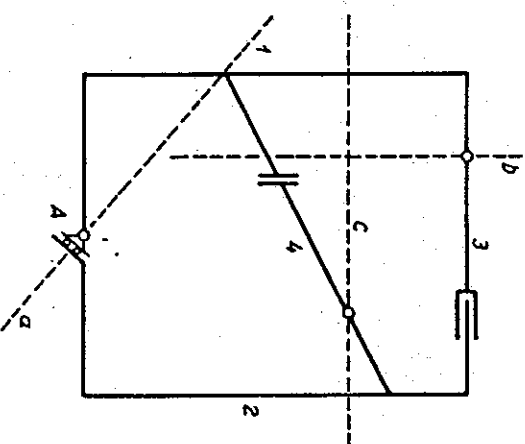


figura 16

E' immediato constatare che nella travatura di figura 16 sono eliminate le mobilità relative delle aste se le rette a, b e c non concorrono in un punto, come accade in questo caso.

~~Esempio~~ (figura 17)

La travatura di figura

17 è costituita da 4 aste (alle quali competono 12 gradi di libertà) collegate tra loro ed al sistema di riferimento da 6 vincoli doppi. Si tratta ancora una volta di verificare che non sono possibili atti di moto rigido. A questo scopo è conveniente procedere nel modo seguente. Si studiano i moti relativi delle

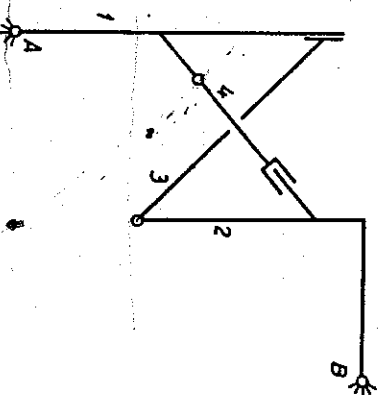


figura 17

Il centro di rotazione relativo ω_{14} dell'asta 4 rispetto all'asta 1 sta sulla retta e (congiungente Q_1 con Q_4) e sulle rette f (che tiene conto del collegamento dovuto all'asta 3). Noto ω_{14} è immediato determinare il centro di rotazione relativa dell'asta 1 rispetto all'asta 2 e poi concludere la discussione.

CAPITOLO II

REAZIONI VINCOLARI

In questo capitolo ci si occupa del problema del calcolo delle reazioni vincolari delle travature isostatiche. Il problema si risolve impendendo le condizioni di equilibrio rigido della travatura nel suo complesso e, ove necessario, soddisfacendo opportune condizioni di equilibrio relative ad aste singole o a gruppi di aste.

Tali condizioni possono essere tradotte sia in forma analitica, sia in forma grafica.

Esempio 1

Si vogliono determinare le reazioni vincolari della travatura rappresentata in figura 1. La travatura non è labile, come si è visto nel capitolo precedente.

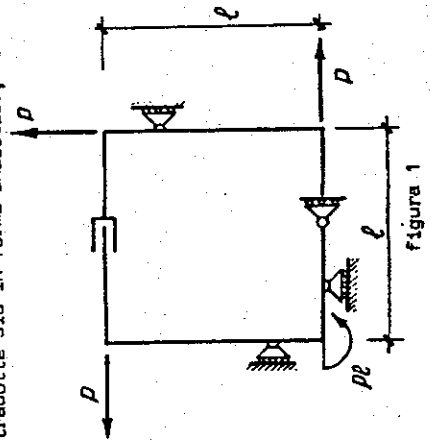


figura 1

Nella figura 2 sono messe in evidenza le componenti di reazione A, B, C che i vincoli sono in grado di esercitare.

Poiché le incognite del problema sono 3, le condizioni di equilibrio rigido della travatura sono sufficienti per risolvere il problema.

Questo problema può essere affrontato in vari modi.

a) Il modo più ovvio è quello di scrivere le equazioni cardinali della statica valide per la struttura nel suo insieme.

La condizione di equilibrio alla traslazione in direzione orizzontale è espressa dalla equazione:

$$C - P + P - A = 0$$

da cui:

$$C = A$$

La condizione di equilibrio alla rotazione in direzione verticale è:

$$B - P = 0$$

da cui:

$$B = P$$

La condizione di equilibrio alla rotazione intorno ad un punto del piano (ad esempio il punto O) risulta:

$$A \cdot a - P \cdot l - B(1-a) - P \cdot l - C(1-a) = 0$$

Il sistema risolvibile è:

$$\begin{cases} B = P \\ A = C \\ A \cdot a - B(1-a) - C(1-a) = 2Pl \end{cases}$$

Sostituendo le prime due equazioni nella terza si ottiene:

$$A(a-1+a) - P(1-a) = 2Pl$$

da cui:

$$A = P \frac{3l-a}{2a-1} = -P \frac{3-a/l}{1-2a/l}$$

$$C = -P \frac{3-a/l}{1-2a/l}$$

$$B = P$$

La figura 3 rappresenta la travatura con le reazioni vincolari indicate col loro verso effettivo. Insieme

mente per scrivere le equazioni di equilibrio le reazioni sono state messe in evidenza con versi del tutto arbitrari; l'analisi dei risultati ottenuti porta a concludere che il verso indicato nella figura 2 per

la reazione B è quello effettivo (perché B risulta positiva) mentre A e C (che sono negative essendo $l > 2a$) hanno verso opposto a quello ipotizzato.

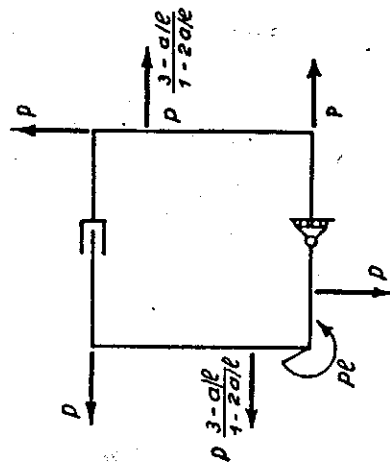


figura 3

b) Il calcolo delle reazioni può essere effettuato sostituendo le due equazioni di equilibrio alla traslazione con altrettante equazioni di equilibrio alla rotazione; bisogna però aver cura che i tre poli delle equazioni di momento non siano allineati. Nel caso in esame si può applicare vantaggiosamente questo criterio scrivendo che il momento delle forze rispetto ai punti O_1 , O_2 e O_3 (figura 4) è nullo. Infatti con queste scelte si perviene ad equazioni che contengono ognuna una sola incognita.

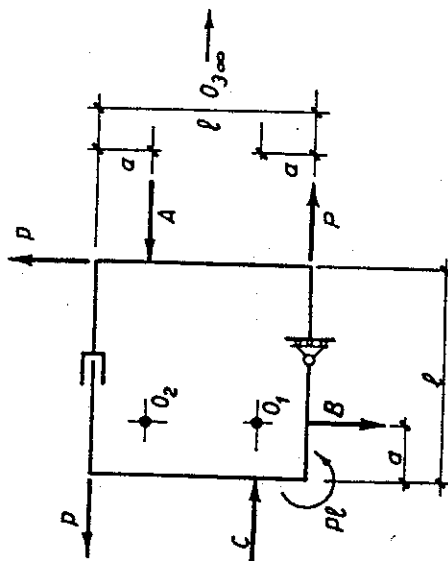


figura 4

gnita, dato che i punti O_1 , O_2 ed $O_{3\infty}$ sono le intersezioni delle rette d'azione delle reazioni.

Equazione di equilibrio intorno al polo O_1 (non compaiono le incognite B e C che hanno braccio nullo):

$$Pl + P(1-a) + Pa + P(1-a) + A(1-2a) = 0$$

da cui:

$$P(3l-a) + A(1-2a) = 0$$

$$A = -P \frac{3-a/l}{1-2a/l}$$

Equazione di equilibrio intorno al polo $O_{3\infty}$, ossia equazione di equilibrio alla trazione in direzione verticale (non compaiono A e C perché orizzontali):

$$B - P = 0$$

da cui:

$$B = P$$

c) Il problema può essere risolto anche con i metodi della statica grafica. A tale fine occorre anzitutto trovare il risultante dei carichi

esterni: i carichi esterni sono costituiti dalla forza verticale P di retta verso l'alto e da una coppia antioraria di momento $2Pl$; il risultante R di questo sistema di carichi è una forza di modulo P , avente retta d'azione verticale traslata di $2l$ verso destra rispetto alla retta d (figura 5).

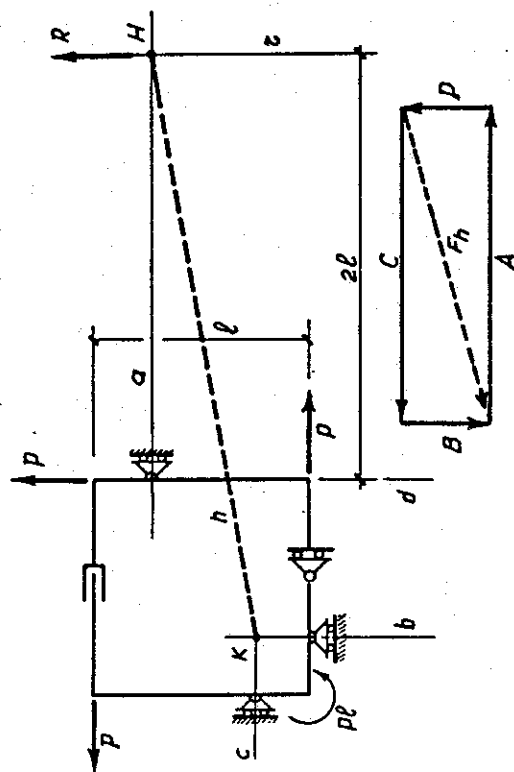


figura 5

Si tratta di determinare tre forze (le reazioni A, B e C) aventi rette d'azione a , b e c che costituiscano sistema equilibrante della forza R . Per far ciò si può equilibrare la R con una forza avente retta d'azione a (la reazione A) ed una forza F_h avente retta d'azione h , congiungente il punto H (intersezione di r ed a) con il punto K (intersezione di b e c). Si determinano le reazioni B e C scomponendo la forza F_h secondo le direzioni b e c (figura 5).

Esempio 2

La travatura rappresentata in figura 6 non è labile, come si è visto nel capitolo precedente. Le reazioni vincolari (figura 7) de-